

Майборода Л. А.

МЕТОД АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ ПРЯМОЙ В ЗАДАЧАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ И ЭКСТРЕМУМОВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ (*)

* Примечание редактора интернет - журнала "Математика в ВУЗе". Такая работа была опубликована профессором Л.А. Майбородой в Вестнике Петровской академии наук и искусств № 1 за 2005 год. Ее основная цель - научить читателя использовать этот метод. Одновременно статья должна служить введением к [1,2,3]. Однако в том виде, в каком она там опубликована, она была бы непонятной большинству студентов технических ВУЗов России. С любезного разрешения проф. Л.А. Майбороды статья переработана В.И. Сушковым без изменения ее содержания с целью использования обозначений, привычных нашим студентам по курсам аналитической геометрии и математического анализа. Текст статьи тоже стилистически изменен для приближения его к привычкам студентов 2-3 курсов технических ВУЗов России. Ответственность за возможные ошибки в формулах целиком ложится на Сушкова В.И. Нумерация формул сохранена.

Метод касательных Ньютона поиска корней дифференцируемых функций $f(x)$ непригоден для таких задач в классе непрерывных функций. В работах [1, 2, 3] предложен метод анализа непрерывных функций, использующий семейства аппроксимирующих прямых и обобщенные функции. Здесь показано приложение метода для отыскания корней и экстремумов функций.

Для заданной непрерывной функции $f(x)$ построим семейство аппроксимирующих ее прямых

$$y = a_0(x_0) + a_1(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (1)$$

Здесь вещественный параметр x_0 играет роль номера прямой в семействе, а коэффициенты $a_0(x_0)$ и $a_1(x_0)$ вычислены по формулам:

$$a_0(t) = \int_{-d}^d f(t+s) dF(s); \quad a_1(t) = \frac{1}{s^2} \int_{-d}^d f(t+s) dF(s); \quad \overline{s^2} = \int_{-d}^d s^2 dF(s) \quad (2,3)$$

где $F(s)$ - функция распределения величины S на промежутке $[-d, d]$, обладающая свойствами

$$\int_{-d}^d dF(s) = 1; \quad \int_{-d}^d s dF(s) = 0; \quad d > 0 \quad (4)$$

и все интегралы понимаются в смысле Стильеса. Очевидно, что коэффициенты a_0 и a_1 зависят не только от x_0 , но также и от выбора числа d и функции распределения $F(s)$. Но их обозначения, указывающие на эти зависимости, громоздки. В этом варианте статьи мы будем их избегать.

Разумеется, все эти формулы тесно связаны с базовыми понятиями теории вероятностей: распределением значений случайной величины, математическим ожиданием, дисперсией. Как и в теории вероятностей вместо промежутка $[x_0 - d, x_0 + d]$ можно использовать и другие измеримые множества на прямой. Однако в этой статье ради простоты будем пользоваться именно таким множеством.

Формулы (2,3) дают значения a_0 и a_1 , обеспечивающие минимум среднеквадратичного отклонения прямой (1) от функции $f(x)$ на промежутке $[x_0 - d, x_0 + d]$:

$$\int_{\Omega} (f(x_0 + s) - a_0 - a_1 s)^2 dF(s) \rightarrow \min$$

Если задать число $d > 0$ и функцию распределения $F(s)$, то для разных чисел x_0 мы получим прямые, каждая из которых наилучшим образом (в среднеквадратичном смысле) приближает (аппроксимирует) функцию $f(x)$ на (своем) промежутке $[x_0 - d, x_0 + d]$. Параметр x_0 позволяет сдвигать этот промежуток влево - вправо.

С помощью функции распределения $F(s)$ мы задаем относительные веса для значений функции $f(x)$ в разных точках промежутка $[x_0 - d, x_0 + d]$. Выбрав непрерывное распределение, мы увидим, что уменьшение d дает семейство прямых, быстрее меняющихся при изменении x_0 . Наоборот, при больших значениях d мы получим семейство прямых, "не замечающее" мелких колебаний

графика функции $f(x)$. Для дискретных распределений такой эффект сглаживания будет наблюдаться для многоточечных распределений.

Для дискретного распределения формулы (2,3) примут вид:

$$a_0(t) = \sum_{i=1}^n f(t + s_i) p_i; \quad a_1(t) = \frac{1}{s^2} \sum_{i=1}^n s_i f(t + s_i) p_i; \quad \overline{s^2} = \sum_{i=1}^n s_i^2 p_i \quad (5,6,7)$$

где $\{s_i, p_i\}$ - набор значений и весов (вероятностей) дискретной величины S , $i = 1, 2, \dots, n$; $p_i > 0$; и

$$\forall i = 1, 2, \dots, n \quad (p_i > 0) \wedge (-d \leq s_i \leq d); \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1; \quad \sum_{i=1}^n s_i p_i = 0$$

Отметим важное обстоятельство: в силу непрерывности функции $f(x)$ коэффициенты a_0 и a_1 непрерывно зависят от x_0

Используем прямые (1) для отыскания корня функции $f(x)$ так же, как Ньютон использовал касательные в методе, носящем его имя. Для этого выберем какое-то числовое значение для x_0 , вычислим коэффициенты $a_0(x_0)$ и $a_1(x_0)$ по формулам (2,3) или (5,6), затем приравняем нулю правую часть (1) и получим точку x_1 пересечения прямой (1) с осью OX , которую примем за новое приближение к искомому корню. Теперь, уже для этой точки x_1 вычислим заново коэффициенты $a_0(x_1)$ и $a_1(x_1)$, опять найдем точку пересечения полученной прямой с осью OX , - это будет точка x_2 . И так далее. Этот алгоритм дает нам рекуррентную формулу

$$x_{k+1} = x_k - \frac{a_0(x_k)}{a_1(x_k)} \quad (8)$$

Для последовательности x_k мы либо должны найти предел при стремлении k в бесконечность и уменьшении d до нуля, либо вычислить ее член с достаточно большим номером k и малым d , гарантирующими малую погрешность.

Формула (8) являет собой обобщение формулы метода касательных Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (8 \text{ Newton})$$

на более широкий класс непрерывных функций. Для дифференцируемых функций формула (8) при стремлении d к нулю превращается в (8 Newton). Убедимся в этом в частном случае дискретного распределения. Для дискретного распределения (8) принимает вид

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\left[\sum_{i=1}^n s_i^2 p_i \right] \cdot \left[\sum_{i=1}^n p_i f(x_k + s_i) \right]}{\sum_{i=1}^n s_i p_i f(x_k + s_i)} \quad (8 \text{ diskret})$$

Используем здесь двухточечное распределение: $n = 2$; $p_1 = p_2 = S$; $s_1 = -d$; $s_2 = d$. Получим:

$$x_{k+1} = x_k - d \frac{f(x_k + d) + f(x_k - d)}{f(x_k + d) - f(x_k - d)} \quad (9)$$

Аналогично на основе (8 diskret) легко построить трех точечные, четырех точечные и т.п. алгоритмы. Оставляем это как упражнение читателю.

Если в (9) числитель и знаменатель дроби разделить на $2d$ и устремить d к нулю, то нетрудно видеть, что в случае дифференцируемой функции $f(x)$ формула (9) в пределе превратится в (8 Newton). В принципе можно такой предельный переход осуществить и для непрерывных функций, но для этого потребуются обобщенные функции.

Можно доказать, что последовательность (8) при стремлении d к нулю при некоторых ограничительных условиях сходится к корню непрерывной функции $f(x)$. Причиной этого является тот естественный факт, что при стремлении d к нулю коэффициент $a_0(t)$ стремится к значению функции $f(t)$.

Семейство аппроксимирующих прямых можно использовать и для отыскания экстремумов функций. Для этого, подобно методу касательных, надо искать такую точку x_0 , для которой в (1) коэффициент $a_1 = 0$. Напишем соответствующие формулы.

Непрерывность функции $a_1(x)$ позволяет использовать изложенный выше метод для решения уравнения

$$a_1(x) = 0 \quad (10)$$

Решение этого уравнения обозначим x^* . Очевидно, эта величина зависит от d . Уменьшение d означает учет свойств функции на меньшем промежутке, и это дает нам надежду в пределе получить стационарную точку функции или ее аппроксимационный аналог (см. [1,2,3]).

Запишем уравнения прямых, аппроксимирующих функцию $a_1(x)$:

$$a = b_0 + b_1 z \quad (11)$$

$$b_0(t) = \int_{-l}^{-l} a_1(t+z) dF(z); \quad b_1(t) = \frac{1}{z^2} \int_{-l}^{-l} z a_1(t+z) dF(z); \quad \overline{z^2} = \int_{-l}^{-l} z^2 dF(z) \quad (12,13)$$

Здесь учтен тот факт, что для аппроксимации функции $a_1(x)$ можно использовать не тот промежуток и распределение, что были употреблены в (2,3) для ее получения, а иной промежуток $[-l, l]$ и другое распределение $F(z)$ на нем.

Подставляя (2,3) в (12,13), получаем формулы (14, 15):

$$b_0(t) = \frac{1}{s^2} \int_{-l}^l \int_{-d}^d s f(t+s+z) dF(s) dF(z);$$

$$b_1(t) = \frac{1}{s^2 z^2} \int_{-l}^l \int_{-d}^d s z f(t+s+z) dF(s) dF(z) \quad (14,15)$$

$$\text{где } \overline{s^2} = \int_{-d}^d s^2 F(s); \quad \overline{z^2} = \int_{-l}^l z^2 F(z)$$

Тогда по (8) для последовательности приближений к стационарной точке функции получим:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\left[\int_{-l}^l z^2 dF(z) \right] \cdot \left[\int_{-l}^l \int_{-d}^d s f(x_k + s + z) dF(s) dF(z) \right]}{\int_{-l}^l \int_{-d}^d s z f(x_k + s + z) dF(s) dF(z)} \quad (16)$$

Для дискретных распределений эта же формула будет иметь вид:

$$x_{n,k+1} = x_{n,k} - \frac{\left[\sum_j z_j^2 p_j \right] \cdot \left[\sum_{i,j} s_i f(x_k + s_i + z_j) p_i q_j \right]}{\sum_{i,j} s_i z_j f(x_k + s_i + z_j) p_i q_j} \quad (16 \text{ diskret})$$

В последней формуле $\{s_i, p_i\}$ и $\{z_j, q_j\}$ - разные дискретные распределения, заданные на $[-d, d]$ и $[-l, l]$, соответственно:

$$\forall i (0 < p_i < 1) \wedge (-d \leq s_i \leq d); \quad \sum_i p_i = 1; \quad \sum_i s_i p_i = 0;$$

$$\forall j (0 < q_j < 1) \wedge (-l \leq z_j \leq l); \quad \sum_j q_j = 1; \quad \sum_i s_j q_j = 0$$

В частном случае двухточечных распределений

$$i=1,2; p_i = S; s_1 = -d; s_2 = d;$$

$$j=1,2; q_j = S; z_1 = -l; z_2 = l;$$

и последняя формула приобретает вид

$$x_{k+1} = x_k - l \frac{[f(x_k + d + l) - f(x_k - d + l)] + [f(x_k + d - l) - f(x_k - d - l)]}{[f(x_k + d + l) - f(x_k - d + l)] - [f(x_k + d - l) - f(x_k - d - l)]} \quad (16-2)$$

Если в этой формуле числитель и знаменатель разделить на $4ld$ и устремить l и d к 0, то эта формула в случае дважды дифференцируемой функции $f(x)$ в пределе даст формулу парабол Ньютона для отыскания точек экстремума:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} \quad (16 \text{ Newton})$$

Если в (16-2) мы положим $d = l$, то получим более простую формулу

$$x_{k+1} = x_k - l \frac{f(x_k + 2l) - f(x_k - 2l)}{f(x_k + 2l) - 2f(x_k) + f(x_k - 2l)} \quad (16-3)$$

которая в случае дважды дифференцируемой функции $f(x)$ совсем уж очевидно превращается в (16 Newton) предельным переходом по l к 0.

В этой статье рассмотрены лишь основные формулы. Вопрос сходимости - отдельная тема.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багухтин В.Д., Майборода Л.А. Об одной формализации экстремальных задач. - Докл. АН СССР, 1980, №1, С. 11- 14.
2. Багухтин В.Д., Майборода Л.А. Оптимизация разрывных функций. - М.:Наука, 1984. С. 208.
3. Багухтин В.Д., Майборода Л.А. Разрывные экстремальные задачи. - СПб.: Гиппократ, 1995. С.360.